

# **SISTEMAS DE CONTROL II**

**Grupo de Investigación en Control Industrial-GICI**

**Area de Automática**

Profesores:

José Miguel Ramírez S.

Esteban Emilio Rosero García

**UNIVERSIDAD DEL VALLE**

Escuela de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Santiago de Cali

23 de octubre de 2007

# Contenido

<b>1. Estabilidad de sistemas dinámicos</b>	<b>9</b>
1.1. Definiciones de Estabilidad	10
1.1.1. Estabilidad de Entrada Limitada-Salida Acotada	10
1.1.2. Estabilidad Interna	11
1.2. Criterio de Routh-Hurwitz	14
1.3. Estabilidad para Sistemas en Tiempo Discreto	17
1.3.1. Prueba de Estabilidad de Jury	17
1.3.2. Estabilidad absoluta de Sistemas Discretos con Routh	21
Referencias	26

# Estabilidad de sistemas dinámicos

## Introducción

Entre los muchos tipos de especificaciones de desempeño utilizadas para el diseño de un sistema de control, el requerimiento más importante es que el sistema sea estable; por lo general, un sistema inestable se considera inútil. Existen muchas nociones de estabilidad, una de ellas es considerar que un sistema es estable si al aplicarle una entrada de magnitud finita, entonces la salida es también finita.

Esta unidad trata las condiciones que se deben satisfacer para que los sistemas lineales invariantes de una entrada y una salida, sean estables. Para estos sistemas, el requerimiento de estabilidad se puede definir en términos de los polos de la función de transferencia en lazo cerrado.

## Objetivo:

Determinar la estabilidad de los sistemas automáticos de control estudiados.  
(Objetivo de evaluación)

## Contenidos

### 1.1. Definiciones de Estabilidad

#### 1.1.1. Estabilidad de Entrada Limitada-Salida Acotada

Se dice que un sistema lineal, invariante y monovariante, es estable de Entrada Limitada-Salida Acotada ELSA (en inglés BIBO, ‘Bounded Input - Bounded Output’), si toda entrada acotada produce una salida acotada. Esta propiedad está muy asociada con la respuesta al impulso  $g(t)$  o  $g(k)$  del sistema; consideremos el sistema de tiempo continuo descrito por su función de transferencia:

$$R(s) \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow C(s)$$

La condición de estabilidad ELSA exige que si  $|r(t)| \leq N < \infty$  para  $t \geq 0$ , entonces  $|c(t)| \leq M < \infty$  para  $t \geq 0$ .

A partir de la respuesta calculada vía la integral de convolución:

$$|c(t)| \leq \int_0^{\infty} |r(t-\tau)| |g(\tau)| d\tau \leq N \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq M$$

se requiere que el área de la curva debajo de  $|g(\tau)|$  debe ser finita; note que es necesario que  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \rightarrow 0$ , para que el sistema continuo sea ELSA estable.

Para los sistemas lineales invariantes monovariantes de tiempo discreto, la definición de estabilidad ELSA es la misma; un análisis similar lleva a que se debe cumplir la condición:

$$\sum_0^{\infty} |g(k)| < \infty$$

lo cual exige que  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \rightarrow 0$ , para que el sistema discreto sea ELSA estable.

Las condiciones anteriores en  $g(t)$  o  $g(k)$  permiten relacionar la estabilidad ELSA con la ubicación de las raíces en los planos  $s$  o  $z$  respectivamente.

1. Plano  $s$ : Polo(s) en el semiplano izquierdo,  $g(t)$  es acotada y decrece asintóticamente  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \rightarrow 0$ ; esto garantiza que  $\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau$  sea acotada, luego el sistema es ESTABLE.

Plano  $z$ : Polo(s) dentro del círculo unitario,  $g(k)$  es acotada y decrece asintóticamente  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \rightarrow 0$ ; esto garantiza que  $\sum_0^{\infty} |g(k)|$  sea acotada, luego el sistema es ESTABLE.

2. Plano  $s$ : Polo(s) en el semiplano derecho  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) \rightarrow \infty$ , luego el sistema no es estable ELSA; un sistema que no es estable ELSA, se define como INESTABLE.

Plano  $z$ : Polo(s) fuera del círculo unitario  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) \rightarrow \infty$ , luego el sistema es INESTABLE.

3. Plano  $s$ : Si hay un polo en el origen o complejos no repetidos en el eje imaginario,  $|g(t)|$  es constante o una senoide no amortiguada y asintóticamente no tiende al infinito; sin embargo, la integral de  $g(t)$  no es acotada y el sistema es ELSA INESTABLE.

Plano  $z$ : Un polo simple en  $z = 1$ , tiene una secuencia de respuesta al pulso unitario constante; pares de polos complejos no repetidos en el círculo imaginario o un polo simple en  $z = -1$  tienen respuestas oscilatorias acotadas. Sin embargo, la sumatoria de  $|g(k)|$  no es acotada y el sistema es ELSA INESTABLE.

Por razones prácticas, cuando las raíces de la ecuación característica están en el eje complejo  $jwt$  o en el círculo de radio unidad del plano  $z$ , se dice que el sistema es MARGINALMENTE ESTABLE o INESTABLE. Recordemos que la acción integral adiciona polos en  $s = 0$  o  $z = 1$  y en principio es inestable, sin embargo, sabemos que es muy útil.

**Ejercicio propuesto:** Utilizando el módulo Edwin, evalúe las respuestas en el tiempo y la estabilidad para un sistema de primer orden; un sistema de segundo orden con polos complejos conjugados, polos reales y polos repetidos; un sistema de segundo orden con un cero en el lado derecho y en el izquierdo; un sistema de segundo orden con un polo adicional ubicado en el lado izquierdo, en el eje  $jwt$  y en el lado derecho.

### 1.1.2. Estabilidad Interna

Consideremos a un sistema de control realimentado unitario con funciones de transferencia  $G_1(s)$  para el controlador y  $G_2(s)$  para la planta, con entradas

de referencia  $r(t)$ , perturbaciones a la entrada y salida de la planta  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$  y ruido en la medida  $n(t)$  y con salidas de interés  $c(t)$  y la señal de control  $a(t)$ , como se muestra en la figura 1.1.

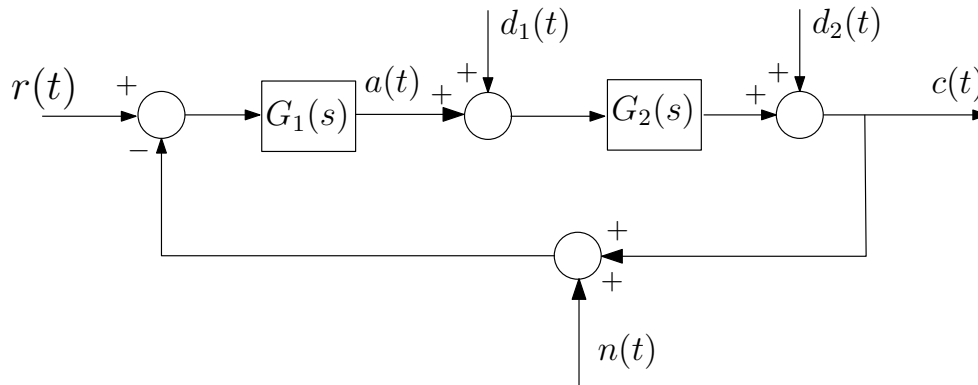


Figura 1.1: Sistema de control realimentado.

Para este sistema podemos definir funciones de transferencia entre cada salida y cada entrada, ocho en total. Decimos que el sistema de control es INTERNAMENTE ESTABLE, si las ocho funciones de transferencia son estables. Esto equivale a exigir que todas las señales en el lazo sean acotadas para cada conjunto de entradas  $r(t)$ ,  $d_1(t)$ ,  $d_2(t)$  y  $n(t)$  acotadas.

La estabilidad interna se puede asociar también a las raíces de la ecuación característica. Consideremos  $G_1(s) = N_1(s)/D_1(s)$  y  $G_2(s) = N_2(s)/D_2(s)$ . Se puede probar que el sistema realimentado es internamente estable, si y solo si las raíces de la ecuación característica:

$$D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) = 0$$

tienen parte real negativa.

La noción de estabilidad interna es más fuerte que la de estabilidad ELSA de la referencia a la salida; ella exige adicionalmente que no hayan cancelaciones de polos inestables entre la planta  $G_2(s)$  y el controlador  $G_1(s)$ .

### Ejemplo

Consideremos:  $G_1(s) = \frac{(-s+1)}{s}$  y  $G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(-s+1)}$

La función de transferencia entre la salida  $C(s)$  y la entrada de referencia  $R(s)$ :

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

es estable. Sin embargo, la función de transferencia entre la salida  $C(s)$  y la entrada de perturbación  $D_1(s)$ :

$$S_{cd}(s) = \frac{C(s)}{D_1(s)} = \frac{s}{(-s + 1)(s^2 + s + 1)}$$

es inestable; el lazo cerrado no es internamente estable, ya que  $D_1(s)D_2(s) + N_1(s)N_2(s) = (-s + 1)(s^2 + s + 1)$  tiene una raíz inestable.

De lo anterior, tenemos que el problema de determinar la estabilidad ELSA o interna de un sistema, se reduce a poder saber si el polinomio característico:

$$p(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0,$$

con coeficientes  $a_i$  reales, tiene todas sus raíces con parte real negativa, esto es, si es *Hurwitz*. Por supuesto que para ello podríamos simplemente calcular las raíces del polinomio. Sin embargo, en muchos casos es útil estudiar la relación entre la posición de las raíces y ciertos coeficientes del polinomio. Veamos algunas propiedades polinomiales de interés para ello:

1. El coeficiente  $a_{n-1}$  satisface:

$$a_{n-1} = -\sum_{i=1}^n \lambda_i$$

donde los  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  son las raíces de  $P(s)$

2. El coeficiente  $a_0$  satisface:

$$a_0 = (-1)^n \prod_{i=1}^n \lambda_i$$

3. Si todas las raíces de  $p(s)$  tienen parte real negativa, entonces necesariamente  $a_i > 0, i \in \{0, 1, \dots, (n-1)\}$ .
4. Si cualquiera de los coeficientes del polinomio es no positivo (negativo o cero), entonces al menos una de las raíces tiene parte real no negativa.

## 1.2. Criterio de Routh-Hurwitz

En estabilidad se estudian 2 aspectos de interés para análisis y diseño:

- \* Estabilidad absoluta: Investiga si un sistema de control es estable.
- \* Estabilidad relativa: Investiga el grado de estabilidad de un sistema estable.

El criterio de Routh-Hurwitz es un algoritmo de aplicación directa para evaluar la estabilidad absoluta de un sistema análogo determinando el número de polos de lazo cerrado que caen en el semiplano derecho, sin calcular las raíces de la ecuación característica. También indica el número de raíces que están sobre el eje imaginario  $jw$ ; es uno de los métodos más usados para determinar si un polinomio es Hurwitz o no, basándose en sus coeficientes. Es útil sobre todo para polinomios de grado elevado.

El método es el siguiente:

1. Ordenar la ecuación característica de la forma:

$$a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n = 0; \quad a_n \neq 0$$

2. Verificar que todos los coeficientes de la ecuación tienen el mismo signo y ninguno de los coeficientes es igual a cero (condición necesaria pero no suficiente); de lo contrario, existe al menos una raíz que es imaginaria o tiene parte real positiva y el polinomio no es Hurwitz.
3. Elaborar la tabla.

$s^n$	$a_0$	$a_2$	$a_4$	. . .
$s^{n-1}$	$a_1$	$a_3$	$a_5$	. . .
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	. . .
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	. . .
.	.	.	.	. . .
.	.	.	.	. . .
.	.	.	.	. . .
$s^1$	$d_1$	.	.	. . .
$s^0$	$f_1$	.	.	. . .

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1a_6 - a_0a_7}{a_1}, \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}, \dots$$

etc...hasta la fila enésima.

El arreglo anterior se conoce como **tabulación de Routh** o **arreglo de Routh**. La columna de eses en el lado izquierdo se utiliza para propósitos de identificación. La columna de referencias mantiene el rastro de los cálculos, y el último renglón de la tabulación de Routh debe ser siempre el renglón de  $S^0$ .

Una vez que la tabulación de Routh se ha completado, el último paso es aplicar el criterio, el cual establece que: *El número de cambios de signos en los elementos de la primera columna es igual al número de las raíces con partes reales positivas o en el semiplano derecho del plano s.*

Por tanto, un polinomio será Hurwitz si tiene todos sus coeficientes y elementos de la primera columna de la tabulación de Routh, positivos.

Se dificulta aplicar el criterio cuando:

1. El primer elemento de una fila es cero, tendiendo a infinito los elementos de la fila siguiente.  
En este caso, se reemplaza el elemento nulo por un número positivo pequeño  $\epsilon$ .
2. Los elementos de una fila son nulos; esto es debido a:
  - Pares de raíces reales equidistantes del eje imaginario.
  - Pares de raíces complejas, simétricas al origen.

En este caso se puede crear la *Ecuación Auxiliar*, con los coeficientes de la fila superior a la fila nula; esta ecuación es de orden par y sus raíces son también de la ecuación característica. Para este caso, se reemplaza la fila nula con los coeficientes de la ecuación auxiliar.

### Ejemplo

Sistema de Control de la excitación con excitatriz y acción I.

$$G(s) = \frac{k_I}{s(\tau_E s + 1)(\tau_G s + 1)} \quad \tau_E, \tau_G > 0$$

Solución:

Ecuación característica:

$$\tau_E \tau_G s^3 + (\tau_E + \tau_G) s^2 + s + k_I = 0$$

$s^3$	$\tau_E \tau_G$	$1$
$s^2$	$\tau_E + \tau_G$	$k_I$
$s^1$	$1 - \tau_{EQ} k_I$	$0$
$s^0$	$k_I$	

Donde:

$$\tau_{EQ} = \frac{\tau_E \tau_G}{\tau_E + \tau_G}$$

El sistema es estable si:

$$1 - \tau_{EQ} k_I > 0 \quad \text{y} \quad k_I > 0$$

$$\longrightarrow 0 < k_I < \frac{1}{\tau_{EQ}} = \frac{\tau_E + \tau_G}{\tau_E \tau_G}$$

Por otro lado, si  $k_I = \frac{\tau_E + \tau_G}{\tau_E \tau_G}$ , la fila  $s$  es nula y hay raíces conjugadas en el eje complejo; la Ecuación Auxiliar es:

$$(\tau_E + \tau_G)s^2 + \frac{\tau_E + \tau_G}{\tau_E \tau_G} = 0$$

$$s^2 = -\frac{1}{\tau_E \tau_G}$$

$$s_{1-2} = \pm j \sqrt{\frac{1}{\tau_E \tau_G}}$$

$\sqrt{\frac{1}{\tau_E \tau_G}}$ : frecuencia de oscilación.

Dividiendo la ecuación característica por la ecuación auxiliarse obtiene la tercera raíz en:

$$s_3 = -\frac{1}{\tau_{EQ}}$$

## 1.3. Estabilidad para Sistemas en Tiempo Discreto

### 1.3.1. Prueba de Estabilidad de Jury

Permite evaluar la estabilidad absoluta de sistemas discretos, directamente de la ecuación característica.

Se debe escribir la ecuación característica en la forma:

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n, \quad a_0 > a_n$$

El sistema es estable si cumple todas las siguientes condiciones:

1.  $|a_n| < a_0$
2.  $P(z)|_{z=1} > 0$
3.  $P(z)|_{z=-1} = \begin{cases} > 0 & \text{Si } n \text{ es par} \\ < 0 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases}$

4.

$$|b_{n-1}| > |b_0|$$

$$|c_{n-2}| > |c_0|$$

⋮

$$|q_2| > |q_0|$$

Donde los coeficientes  $b_k, c_k, \dots, q_k$  de la última condición, se calculan a partir de la siguiente tabla.

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$\dots$	$z^{n-2}$	$z^{n-1}$	$z^n$
1	$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$a_{n-3}$	$\dots$	$a_2$	$a_1$	$a_0$
2	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\dots$	$a_{n-2}$	$a_{n-1}$	$a_n$
3	$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$b_{n-4}$	$\dots$	$b_1$	$b_0$	
4	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	$b_{n-2}$	$b_{n-1}$	
5	$c_{n-2}$	$c_{n-3}$	$c_{n-4}$	$c_{n-5}$	$\dots$	$c_0$		
6	$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	$c_{n-2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮				
$2n - 5$	$p_3$	$p_2$	$p_1$	$p_0$				
$2n - 4$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	$p_3$				
$2n - 3$	$q_2$	$q_1$	$q_0$					

Con:

$$b_k = \det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$$

$$c_k = \det \begin{bmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n - 2$$

⋮

$$q_k = \det \begin{bmatrix} p_3 & p_{2-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{bmatrix} \quad k = 0, 1, 2$$

Note que la última fila tiene 3 elementos, con excepción de los sistemas de segundo orden para los cuales habrá  $2n - 3 = 1$ , un elemento; observe que los elementos de una fila par son los de la fila impar superior, en sentido inverso.

### Ejemplo

Evaluar la estabilidad del sistema con ecuación característica:

$$P(z) = z^4 - 1,2z^3 + 0,07z^2 + 0,3z - 0,08 = 0$$

Solución:

$$a_0 = 1, a_1 = -1,2, a_2 = 0,07, a_3 = 0,3, a_4 = -0,08$$

1.  $|a_n| < a_0 : |-0,08| < 1$  *Cumple*
2.  $P(1) = 0,09 > 0$  *Cumple*
3.  $P(-1) = 1,89 > 0$  *Cumple*

4.

	$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$	$z^4$
1	-0,08	0,3	0,07	-1,2	1
2	1	-1,2	0,07	0,3	-0,08
3	-0,994	1,176	-0,075	-0,204	
4	-0,204	-0,075	1,176	-0,994	
5	0,946	--	0,315		

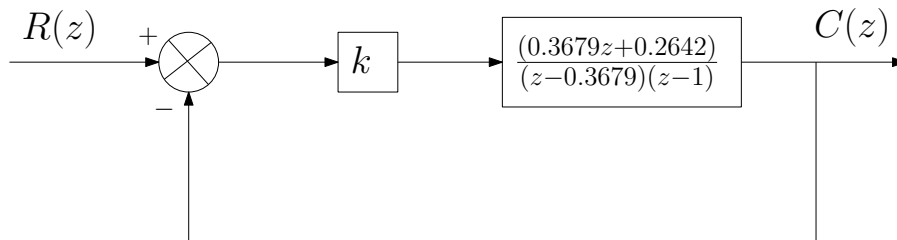
$$|b_3 = -0,994| = 0,994 > |b_0 = -0,204| = 0,204 \text{ Cumple}$$

$$|c_2 = 0,946| = 0,946 > |c_0 = -0,315| = 0,315 \text{ Cumple}$$

∴ el sistema es estable

**Ejemplo**

Evaluar el rango de valores de la ganancia  $k$  para que el siguiente sistema sea estable:



Solución:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{k(0,3679z + 0,2642)}{z^2 + (0,3679k - 1,3679)z + 0,3679 + 0,2642k}$$

Ecuación característica:

$$\underbrace{1}_{a_0} z^2 + \underbrace{(0,3679k - 1,3679)}_{a_1} z + \underbrace{0,3679 + 0,2642k}_{a_2}$$

Para un sistema de segundo orden, las condiciones se reducen a:

1.  $|a_2| < a_0$
2.  $P(1) > 0$
3.  $P(-1) > 0$

De la condición 1. se obtiene:

$$|0,3679 + 0,2642k| < 1$$

$$-5,1775 < 2,3925k$$

De la condición 2. se obtiene:

$$P(1) = 0,6321k > 0$$

$$k > 0$$

De la condición 3. se obtiene:

$$P(-1) = 2,7358 - 0,1037k > 0$$

$$k < 26,38$$

La solución es la intersección de las tres condiciones previas:

$$\therefore 0 < k < 2,3925$$

### 1.3.2. Estabilidad absoluta de Sistemas Discretos con Routh

Si se usa la transformada Bilineal:

$$W = \frac{z+1}{z-1}$$

El interior del círculo unitario  $|z| < 1$  corresponderá en el plano complejo de  $W = \sigma + jw$ :

$$z = \frac{W+1}{W-1} \rightarrow \left| \frac{\sigma + jw + 1}{\sigma + jw - 1} \right| < 1 \rightarrow \frac{(\sigma+1)^2 + w^2}{(\sigma-1)^2 + w^2} < 1$$

$$\sigma^2 + 2\sigma + 1 + w^2 < \sigma^2 - 2\sigma + 1 + w^2 \rightarrow \sigma < 0$$

al semiplano izquierdo; por tanto, se puede aplicar el criterio de Routh en el dominio de  $W$  para evaluar la estabilidad absoluta.

#### Ejemplo

Consideremos el polinomio:

$$P(z) = z^3 - 1,3z^2 - 0,08z + 0,24 = 0$$

Solución:

Con

$$z = \frac{W+1}{W-1} \rightarrow P(W) = \left(\frac{W+1}{W-1}\right)^3 - 1,3\left(\frac{W+1}{W-1}\right)^2 - 0,08\left(\frac{W+1}{W-1}\right) + 0,24 = 0$$

$$\rightarrow W^3 - 7,57W^2 - 36,43W - 14,14 = 0$$

El sistema es inestable pues los coeficientes no tienen el mismo signo.

**Nota:** Este procedimiento exige más cálculos que Jury, pero permite calcular la frecuencia de oscilación para la *Ganancia Crítica*: ganancia no nula, para la cual se obtienen polos de lazo cerrado en el eje complejo.

### Ejercicios propuestos

Realice los siguientes ejercicios del libro de Kuo:

Routh: 6-2, 6-3, 6-4, 6-7, 6-9

Jury: 6-18, 6-19, 6-20

Transformada Bilineal: 6-17

### Resumen

En este capítulo se dieron las definiciones de estabilidad de entrada-salida e interna en tiempo continuo y discreto, para sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Se conoció que la condición para estos tipos de estabilidad se relaciona directamente con las raíces de la ecuación característica. Para que un sistema en tiempo continuo sea estable, las raíces de la ecuación característica deben localizarse en el semiplano izquierdo del plano  $s$ . Para que un sistema en tiempo discreto sea estable, las raíces de la ecuación característica deben localizarse dentro del círculo unitario en el plano  $z$ .

La condición necesaria para que un polinomio  $P(s)$  no tenga ceros sobre el eje  $jw$  y en el semiplano derecho del plano  $s$  es que todos sus coeficientes deben ser del mismo signo y ninguno puede ser cero. Mediante el criterio de Routh Hurwitz, se verifican las condiciones necesarias y suficientes para que  $P(s)$  tenga ceros solamente en el semiplano izquierdo del plano  $s$ .

Para sistemas en tiempo discreto, se debe verificar la ecuación característica  $P(z)$  para raíces sobre y fuera del círculo unitario en el plano  $z$ . El criterio de Routh Hurwitz no puede aplicarse directamente a esta situación. Un método confiable es utilizar la transformada bilineal, que transforma el círculo unitario en el plano  $z$  en el eje imaginario de otro plano de variable compleja, y entonces se puede aplicar el criterio de Routh Hurwitz a la ecuación transformada.

La prueba de estabilidad de Jury permite evaluar la estabilidad absoluta de sistemas discretos, directamente de la ecuación característica.

## Actividades de aprendizaje

Los ejercicios propuestos a continuación son para que usted los desarrolle como parte de su preparación y no se debe entregar ningún informe al profesor.

1. Realice:
  - Una lectura reflexiva y crítica del material del curso.
2. Desarrolle los ejercicios propuestos en esta unidad.
3. (Ejercicio 6-4. Kuo, 1996) La función de transferencia en lazo de un sistema de control realimentado de un solo lazo está dada como:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 5)}{s(s + 2)(1 + Ts)}$$

Los parámetros  $K$  y  $T$  pueden estar representados en el plano con  $K$  como el eje horizontal y  $T$  como el eje vertical. Determine las regiones en el plano de parámetros de  $T$  contra  $K$  en el cual el sistema en lazo cerrado es asintóticamente estable. Indique el límite en el que el sistema es marginalmente estable.

4. (Ejercicio 6-9. Kuo, 1996) En la figura 1.2 se muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de un motor con realimentación por tacómetro. Encuentre el intervalo de la constante del tacómetro  $K_t$  para que el sistema sea asintóticamente estable.

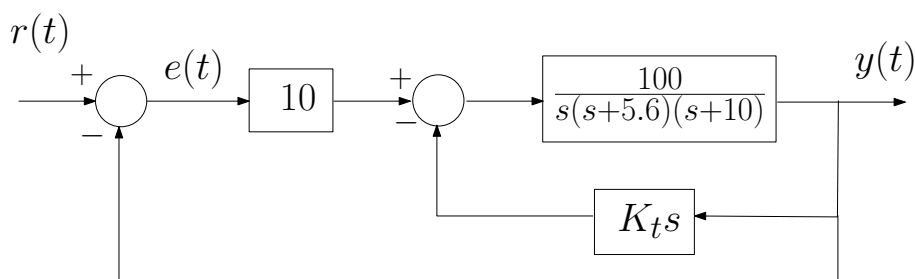


Figura 1.2: Sistema de realimentación por tacómetro

5. (Ejercicio 6-17b. Kuo, 1996) Aplique la transformada  $w$  a la siguiente ecuación característica del sistema de control en tiempo discreto, y determine las condiciones de estabilidad (asintóticamente estable, marginalmente estable o inestable) por medio del criterio de Routh-Hurwitz.

$$z^3 + z^2 + 3z + 0,2 = 0$$

6. (Ejercicio 6-19. Kuo, 1996) La ecuación característica de un sistema de control lineal digital es:

$$z^3 + z^2 + 1,5Kz - (K + 0,5) = 0$$

Determine los valores de  $K$  para que el sistema sea asintóticamente estable.

7. Utilice un programa para la búsqueda de raíces para encontrar las raíces de las siguientes ecuaciones características de sistemas lineales y determine la condición de estabilidad de los mismos.

■

$$s^4 + 12s^3 + s^2 + 2s + 10 = 0$$

■

$$z^3 + 2z^2 + 1,2z + 0,5 = 0$$

## Lecturas complementarias

- Kuo Benjamin. Sistemas de Control Automático, Prentice Hall 1997. Capítulo 6: Estabilidad de sistemas de control lineales

## Referencias

- KUO BENJAMIN, Sistemas de Control Automático, Prentice Hall 1997.

- OGATA KATSUSHITO, Ingeniería de Control Moderno, P.H.H. 3 edición, 1998.
- OGATA KATSUSHITO, Sistemas de Control en Tiempo Discreto. P.H.H, Méx. 1996.

# Bibliografía

- R. Dorf. *Sistemas Modernos de Control*. Addison Wesley Iberoamericana, 2da. Edición, 1989.
- Benjamin. Kuo. *Sistemas de Control Automático*. Prentice Hall-Hispanoamericana, 1996.
- K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice Hall Hispanoamericana, 3a. Edición, 1998.